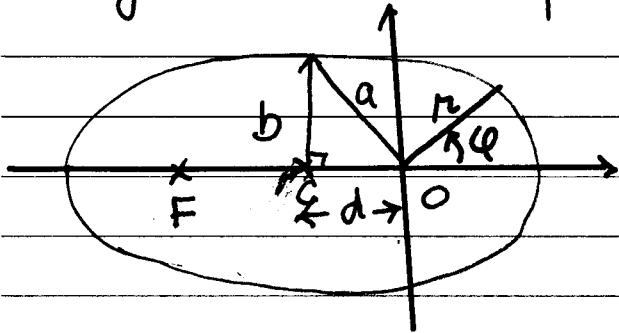


A equação dada representa uma elipse, com a origem num dos focos:



Temos:

$$r_{\min} = \frac{1}{u_{\max}} = \frac{p}{1+\epsilon} = a(1-\epsilon)$$

$$r_{\max} = \frac{1}{u_{\min}} = \frac{p}{1-\epsilon} = a(1+\epsilon)$$

$$r_{\max} + r_{\min} = 2a = \frac{p}{1-\epsilon} + \frac{p}{1+\epsilon} = \frac{2p}{1-\epsilon^2}$$

$$r_{\max} - r_{\min} = \frac{2p\epsilon}{1-\epsilon^2}, \text{ com } a = \frac{p}{1-\epsilon^2}$$

Daqui obtemos a relação:

$$\epsilon = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}},$$

dai o nome de 'excentricidade'.

Distância do centro da elipse a um dos focos:

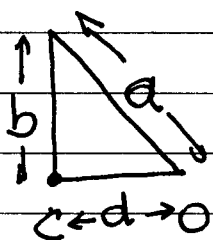
$$d = a - r_{\min} = a - \frac{p}{1+\epsilon} = a - \frac{p(1-\epsilon)}{1-\epsilon^2}$$

$$= a - a(1-\epsilon) = a\epsilon$$

Lembrar que a elipse é o lugar geométrico de todos os pontos cuja soma de distâncias aos focos (O, F) é constante:

$$l_O + l_F = 2a.$$

Daqui relacionamos o semi-eixo menor com a e d , num triângulo retângulo:



$$b^2 + d^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2),$$

ou seja:

$$b^2 = a(1+e)a(1-e) = r_{\max} \cdot r_{\min}$$

$$b = a \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{r_{\max} \cdot r_{\min}}$$

Este problema está relacionado com a chamada '1ª. lei de Kepler':

"Todos os planetas movimentam-se em órbitas elípticas, com o sol num dos focos"

Newton acreditou nos dados de Kepler.

Para essas órbitas, a força central tem a forma:

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad k > 0,$$

sendo atrativa.

Calculamos o potencial:

$$V(r) = - \int_{r_0}^r \left(-\frac{k}{r^2} dr \right) = k \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$= k \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_0}^r = -\frac{k}{r} + \frac{k}{r_0}.$$

Colocamos o valor nulo do potencial em $r_0 \rightarrow \infty$,

$$\boxed{V(r) = -\frac{k}{r}, \quad k > 0. \quad (*)}$$

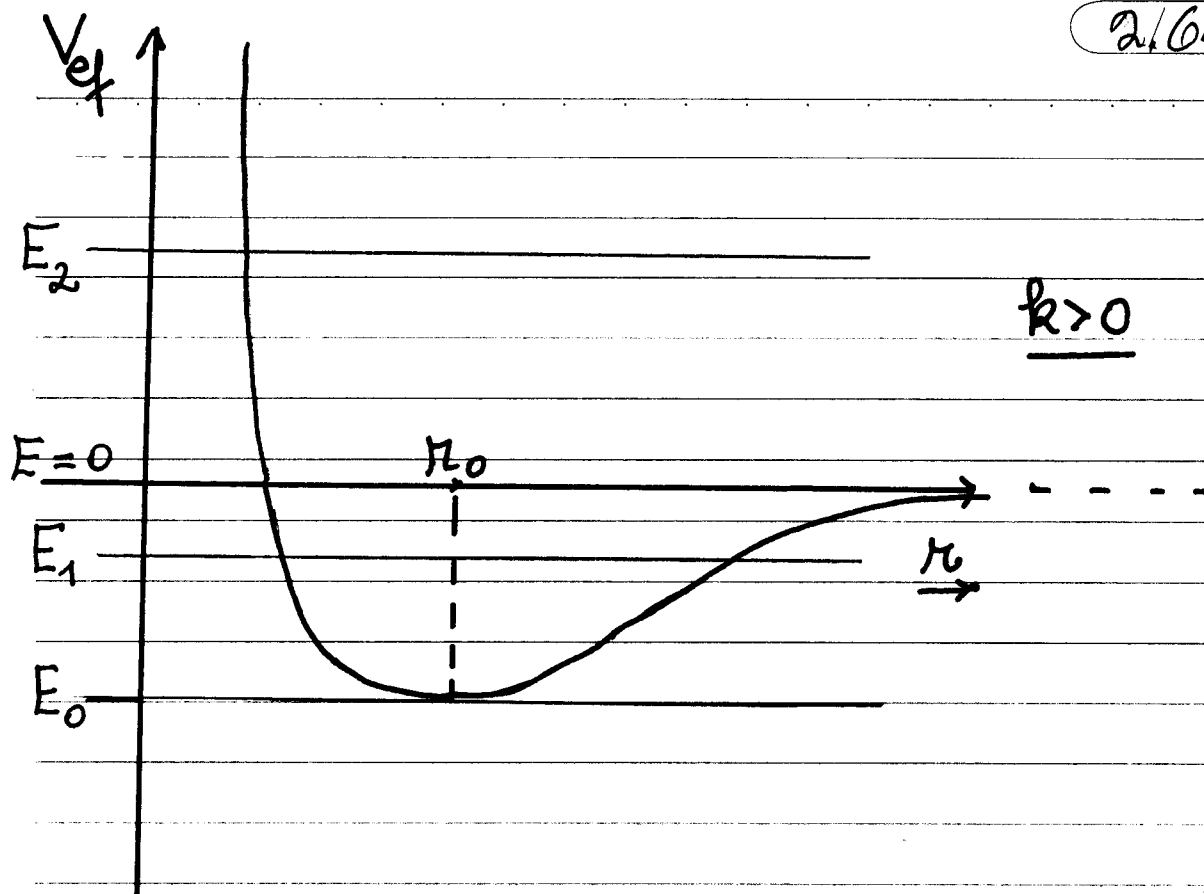
Resolvemos (como Newton) agora o problema inverso. Queremos integrar a órbita para um potencial da dependência (*).

Precisamos analisar o potencial efetivo:

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Este potencial só é atrativo para energias negativas, onde o movimento é confinado.

Veja o gráfico:



Calculamos o mínimo do potencial:

$$\left(\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \right)_{r_0} = -\frac{k}{r_0^2} - \frac{L^2}{mr_0^3} = 0,$$

Solução: $r_0 = \frac{L^2}{mk},$

com energia no mínimo:

$$V_{\text{min}} = V_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{k^2 m}{L^2} + \frac{k^2 m}{2L^2} = -\frac{k^2 m}{2L^2},$$

com:

$$E_0 = -\frac{k^2 m}{2L^2}$$

sendo a energia da órbita circular, de raio

$$r_0 = \frac{L^2}{mk}$$

Propriedades gerais:

i) para $E = E_0 = -\frac{k^2 m}{2L^2}$, temos uma órbita circular;

ii) para $E_0 < E = E_1 < 0$, o movimento está confinado entre dois pontos (radiais) de retorno. Resolver:

$$V_{\text{ef}}(r) = E = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Soluções:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{km}{L^2} \pm \frac{m}{L^2} \sqrt{k^2 + \frac{2EL^2}{m}} \\ &= \frac{km}{L^2} \pm \frac{km}{L^2} \sqrt{1 + \frac{E}{|E_0|}} \end{aligned}$$

Quadrando se anula no caso de uma órbita circular.

Para $E_0 < E < 0$, temos duas soluções reais e positivas:

$$u_{1,2} = \frac{km}{L^2} \pm \frac{km}{L^2} \sqrt{1 - \frac{|E|}{|E_0|}}$$

e o movimento fica confinado entre dois círculos de raios $r_{\min}$ e $r_{\max}$:

$$u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}} = \frac{k m}{L^2} \left(1 + \sqrt{1 - |E/E_0|} \right),$$

$$u_{\min} = \frac{1}{r_{\max}} = \frac{k m}{L^2} \left(1 - \sqrt{1 - |E/E_0|} \right),$$

onde $\frac{k m}{L^2} = u_0 = \frac{1}{r_0}$ é o inverso do raio da órbita circular;

iii) $E = 0 \Rightarrow u_{\min} = 0$, ou $r_{\max} \rightarrow \infty$

O movimento não é mais confinado, a partícula pode escapar a ∞

iv) para $E > 0$, só temos uma raiz positiva (física), que é

$$u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}} = \frac{k m}{L^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{E}{|E_0|}} \right).$$

Portanto o movimento não é confinado.

Integramos a equação da órbita para este potencial:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr' (L/mr'^2)}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{ef}}(r)]}},$$

Com

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{k}{r_0} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Fazer mudança de variável $u = \frac{1}{r_0}$

$$\Rightarrow du = -\frac{1}{r^2} dr,$$

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_{u_0}^u \frac{(L/m) du}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E + ku - \frac{L^2}{2m} u^2 \right]}}$$

$$= \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{u_0}^u \frac{(-du)}{\sqrt{E + ku - \frac{L^2}{2m} u^2}}$$

$$= \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{u_0}^u \frac{(-du)}{\sqrt{R}},$$

onde $R = E + ku - \frac{L^2}{2m} u^2$ é o radicando. Para

integrar, a técnica consiste em completar o quadrado, na forma:

$$R = E + A^2 - \left(\frac{L^2}{2m} u^2 - ku + A^2 \right)$$

Solução: $A = \frac{k\sqrt{2m}}{2L}, A^2 = \frac{mk^2}{2L^2} = |E_0|$

$$R = E + |E_0| - \left(\frac{L}{\sqrt{2m}} u - A \right)^2$$

$$= E + |E_0| - A^2 \left(\frac{L}{A\sqrt{2m}} u - 1 \right)^2$$

$$= E + |E_0| - |E_0| \left(\frac{L^2}{mk} u - 1 \right)^2$$

$$= (E + |E_0|) \left\{ 1 - \frac{|E_0|}{E + |E_0|} \left(\frac{L^2}{mk} u - 1 \right)^2 \right\}$$

Obtemos:

$$\sqrt{R} = (E + |E_0|)^{1/2} \sqrt{1 - \frac{|E_0|}{E + |E_0|} \left(\frac{L^2}{mk} u - 1 \right)^2},$$

com a integração:

$$\varphi - \varphi_0 = \sqrt{\frac{L^2}{2m(E + |E_0|)}} \int_{u_0}^u \frac{(-du)}{\sqrt{1 - \frac{|E_0|}{E + |E_0|} \left(\frac{L^2}{mk} u - 1 \right)^2}}$$

Sugere mudar de variável, para

$$x \equiv \left(\frac{|E_0|}{E + |E_0|} \right)^{1/2} \left(\frac{L^2}{mk} u - 1 \right),$$

onde

$$du = \left(\frac{E + |E_0|}{|E_0|} \right)^{1/2} \frac{mk}{L^2} dx$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \left(\frac{L^2}{2m(E + |E_0|)} \cdot \frac{E + |E_0|}{|E_0|} \right)^{1/2} \frac{mk}{L^2} x$$

$$x \int_{x_0}^x \frac{(-dx)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{L^2}{2m|E_0|} \frac{m^2 k^2}{L^4} \right)}_1 \int_{x_0}^x \frac{(-dx)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Obtemos a forma simples:

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \text{Arccos } x - \text{Arccos } x_0,$$

com

$$x = \left(\frac{|E_0|}{E + |E_0|} \right)^{1/2} \left(\frac{L^2}{mk} u - 1 \right).$$

Note que $\frac{mk}{L^2} = u_0 = \frac{1}{r_0}$, é o raio da órbita circular.

Como ponto de referência x_0 , o mais vantajoso é usar o pericélio, para o qual:

$$u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}} = u_0 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{E}{|E_0|}} \right).$$

Este ponto existe para todos os casos de energia total, positiva ou negativa:
 $E_0 \leq E$

$$\begin{aligned} x_0 &= \left(\frac{E}{E + |E_0|} \right)^{1/2} \left\{ \frac{u_0}{u_0} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{E}{|E_0|}} \right) - 1 \right\} \\ &= \left(\frac{E}{E + |E_0|} \right)^{1/2} \sqrt{1 + \frac{E}{|E_0|}} = 1, \end{aligned}$$

com $\text{Arc cos } x_0 = \text{Arc cos}(1) = 0$, medindo o ângulo φ , a partir do pericélio ($\varphi_0 \equiv 0$).

Obtemos:

$$\cos \varphi = \left(\frac{|E_0|}{E + |E_0|} \right)^{1/2} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right)$$

► Def. Excentricidade:

$$\varepsilon \equiv \left(\frac{E + |E_0|}{|E_0|} \right)^{1/2}$$

► Def. 'Latus rectum'

$$p \equiv \frac{L^2}{mk} = r_0.$$

Com as definições acima, a equação da órbita pode ser escrita como:

$$\epsilon \cos \varphi = \frac{p}{r} - 1,$$

ou

$$\frac{p}{r} = (1 + \epsilon \cos \varphi),$$

que é a equação de uma cônica em coordenadas polares, com a origem num dos focos.

Todos os casos são:

i) $E = E_0 = -\frac{k^2 m}{2L^2}$, $\epsilon = 0$, órbita circular;

ii) $E_0 < E < 0$, $0 < \epsilon < 1$, elipse;

iii) $E = 0$, $\epsilon = 1$, parábola;

iv) $E > 0$, $\epsilon > 1$, hipérbole.

Os pontos de retorno ficam dados pelas equações:

$$u_{1,2} = u_0 \left(1 \pm \sqrt{\frac{E + |E_0|}{|E_0|}} \right),$$

onde $u_0 = \frac{1}{r_0}$ ou $u_0^{-1} = r_0$, o raio da órbita

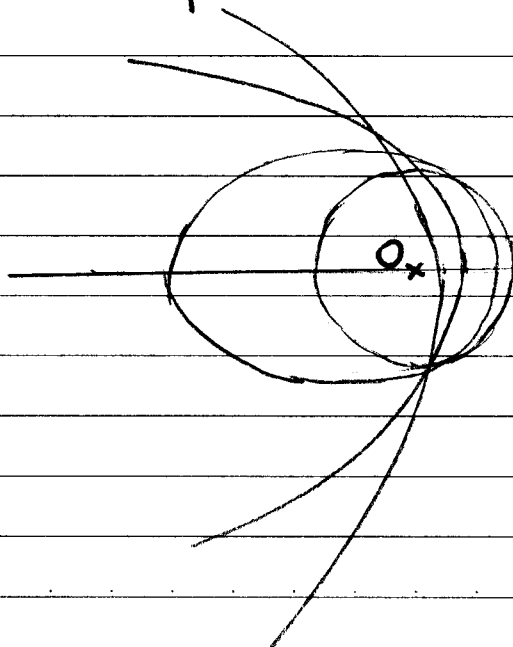
circular, $r_0 = \frac{L^2}{mk}$ e $|E_0| = \frac{k^2 m}{2L^2}$,

com $E_0 = -|E_0|$, a energia do mínimo (e da órbita circular).

As soluções físicas de $u_{1,2}$ têm que ser positivas. Assim, para $E > 0$, só a solução para o periélio permanece

$$u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}} = u_0 \left(1 + \sqrt{\frac{E + |E_0|}{|E_0|}} \right).$$

O movimento é confinado apenas para $E_0 \leq E < 0$ e a órbita é fechada.



LEIS de KEPLER para o movimento planetário

I "Todos os planetas se movimentam em órbitas elípticas, com o sol num dos focos"

Newton mostrou que este tipo de órbita é devido à lei de força

$$F(r) = - \frac{k}{r^2},$$

com energia potencial $V(r) = - \frac{k}{r}$. Quando

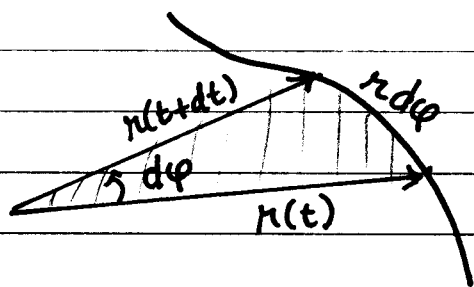
integrarmos a eq. de movimento para este potencial, descobrimos que as órbitas elípticas aparecem no movimento confinado, com

$$E_0 \leq E < 0,$$

onde temos dois pontos de retorno.

II "Um raio vetor ligando o sol com um planeta, varre áreas iguais em tempos iguais".

Esta segunda lei é uma consequência da conservação do momento angular para uma força central.



O elemento de área dA é obtido por:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

e a velocidade com que o raio vetor varre a área é

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} r^2 \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{2m} = \text{cte.}$$

que é constante, porque o momento angular é conservado. Se a órbita for periódica, com período T , a área da órbita será:

$$A = \int_0^T dt \left(\frac{dA}{dt} \right) = \frac{L}{2m} T,$$

e o período resulta $T = \frac{2m A}{L}.$

III "O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse."

Para uma elipse, $A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}.$
Temos que:

$$\begin{aligned} u_{\min} + u_{\max} &= 2u_0 = \frac{2mk}{L^2} = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{r_{\min} r_{\max}} \\ &= \frac{2a}{b^2} \end{aligned}$$

Resultado: $L^2 = \frac{mk b^3}{a}$

Também :

$$T^2 = \frac{4m^2}{L^2} A^2 = \frac{4m^2 a}{mk b^2} \times \pi^2 a b^2$$

ou seja :

$$T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{m}{k} \right) a^3$$

Escrevendo a constante k da força de gravitação como :

$$k = G m M_s ,$$

a 3ª lei de Kepler fica como :

$$T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{1}{G M_s} \right) a^3 ,$$

onde a constante de proporcionalidade independe do planeta. Veremos (no próximo capítulo) depois que este resultado é aproximado e que temos pequenas correções que si dependem da massa do planeta.

§ Espalhamento de Rutherford

Resolvemos agora o caso de um potencial repulsivo:

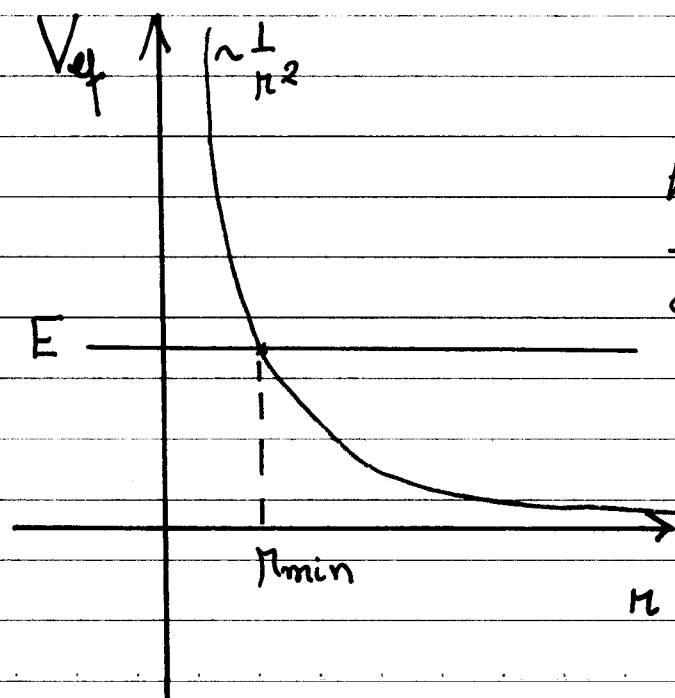
$$V(r) = \frac{k}{r}, \quad k > 0.$$

No caso da experiência de Rutherford, trata-se de um potencial de Coulomb entre cargas positivas, onde $q_1 = Ze$ a carga de um núcleo atômico alvo, $q_2 = 2e$, partículas alpha como projetis. De maneira que

$$0 < k = q_1 q_2 = 2Ze^2, \quad \text{onde 'e'}$$

é a carga elementar.

Para o potencial efetivo temos



$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} > 0$$

A energia total E só pode ser positiva e temos apenas um ponto de retorno, r_{min} , que é o periélio.

Para o ponto de retorno resolvemos:

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(\frac{L^2}{2m} \right) u^2 + k u = E,$$

com uma única solução física:

$$u_{\text{max}} = \frac{1}{r_{\text{min}}} = - \frac{k m}{L^2} + \frac{k m}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2 E L^2}{m k^2}}$$

Def,

$$u_0 \equiv \frac{k m}{L^2} \equiv \frac{1}{p}, \quad E_0 = \frac{m k^2}{2 L^2} > 0$$

$$\Rightarrow u_{\text{max}} = \frac{1}{r_{\text{min}}} = u_0 \left(\sqrt{1 + \frac{E}{E_0}} - 1 \right) > 0$$

$$\boxed{\frac{1}{r_{\text{min}}} = \frac{1}{p} \left(\sqrt{1 + \frac{E}{E_0}} - 1 \right)}$$

Queremos integrar a órbita:

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_{u_0}^u \frac{(L/m) du}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - k u - \frac{L^2}{2m} u^2 \right)}}$$

$$= - \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{E - k u - \frac{L^2}{2m} u^2}}$$

Como no caso de Kepler, completamos o quadrado no radicando R

$$R = E - \left(\frac{L^2}{2m} u^2 + ku \right)$$

$$= E + E_0 - \left(\frac{L^2}{2m} u^2 + ku + \frac{mk^2}{2L^2} \right)$$

$$= E + E_0 - \left(\frac{L}{\sqrt{2m}} u + \frac{k\sqrt{2m}}{2L} \right)^2$$

$$= E + E_0 - E_0 \left(\frac{L^2}{mk} u + 1 \right)^2$$

$$= E + E_0 - E_0 (pu + 1)^2$$

de modo que

$$\sqrt{R} = \sqrt{E + E_0} \left(1 - \frac{E_0}{E + E_0} (pu + 1)^2 \right)^{1/2}$$

A integração fica como:

$$\varphi - \varphi_0 = \sqrt{\frac{L^2}{2m(E + E_0)}} \int_{u_0}^u \frac{(-du)}{\sqrt{1 - \frac{E_0}{E + E_0} (pu + 1)^2}},$$

que sugere a mudança de variável:

$$x = \sqrt{\frac{E_0}{E + E_0}} (pu + 1),$$

$$\text{com } du = \sqrt{\frac{E + E_0}{E_0}} \frac{dx}{p},$$

ou seja

$$\varphi - \varphi_0 = \sqrt{\frac{L^2}{2mp^2 E_0}} \int_{x_0}^x \frac{(-dx)}{\sqrt{1 - x^2}},$$

onde o prefator:

$$\left(\frac{L^2}{2m \frac{mk^2}{2L^2} \times \frac{L^4}{m^2 k^2}} \right)^{1/2} = 1,$$

portanto:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{x_0}^x \frac{(-dx)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \text{Arccos } x - \text{Arccos } x_0$$

Tomamos como referência para (x_0, φ_0) o

ponto do periélio:

$$x_0 = \sqrt{\frac{E_0}{E+E_0}} (\rho u_{\max} + 1)$$

$$= \sqrt{\frac{E_0}{E+E_0}} \left(\sqrt{1 + \frac{E}{E_0}} - \cancel{1} + \cancel{1} \right)$$

$$= 1,$$

$$\Rightarrow \text{Arccos } x_0 = 0 = \text{Arccos}(1).$$

Medindo o ângulo φ a partir do periélio, escolhermos $\varphi_0 = 0$. Para a órbita temos:

$$\varphi = \text{Arccos } x \Leftrightarrow x = \cos \varphi,$$

ou

$$\sqrt{\frac{E_0}{E+E_0}} (\rho u + 1) = \cos \varphi.$$

► Def. Excentricidade, ε (para a órbita hiperbólica)

$$\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{E+E_0}{E_0}} > 1,$$

porque neste caso, ε é estritamente positiva.

Obtemos :

$$\boxed{pu = \frac{p}{r} = \varepsilon \cos \varphi - 1}, \quad (*)$$

com

$$p = \frac{L^2}{k m}$$

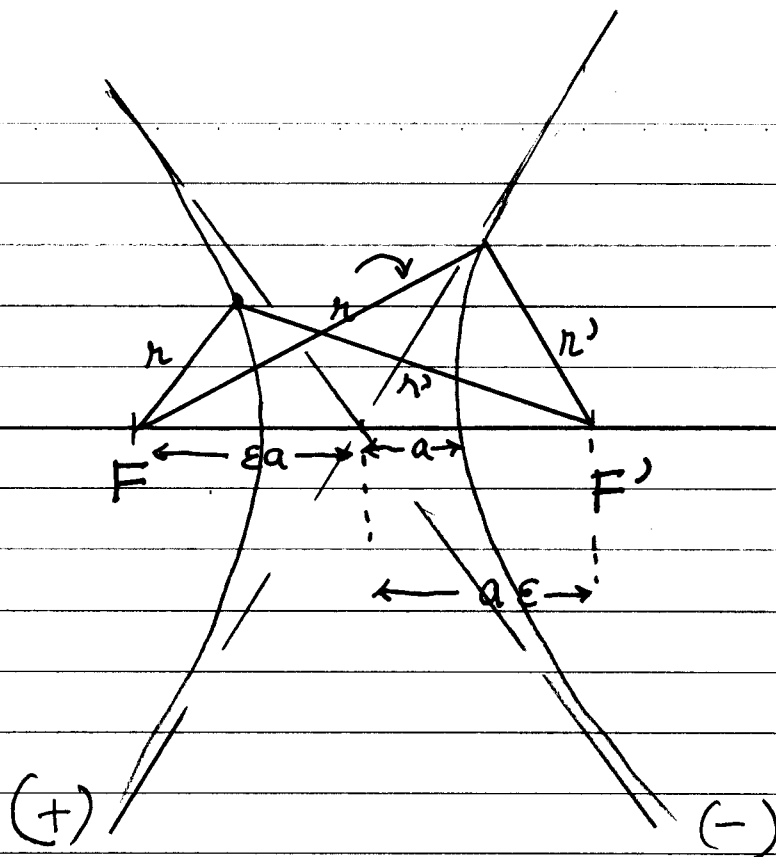
A equação (*) representa uma hipérbole, onde o centro de força se encontra no foco externo. Temos:

$$r_{\min} = \frac{p}{\sqrt{\frac{E+E_0}{E_0}} - 1} = \frac{p}{\varepsilon - 1}$$

► Def $a(\varepsilon + 1) = r_{\min} = \frac{p}{\varepsilon - 1}$

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{p E_0}{E}$$

'a' é a grandeza que define a geometria da hipérbole, como mostra o desenho:

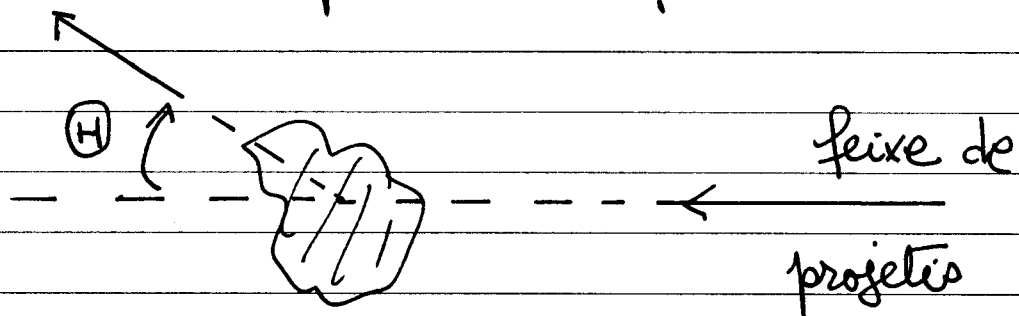


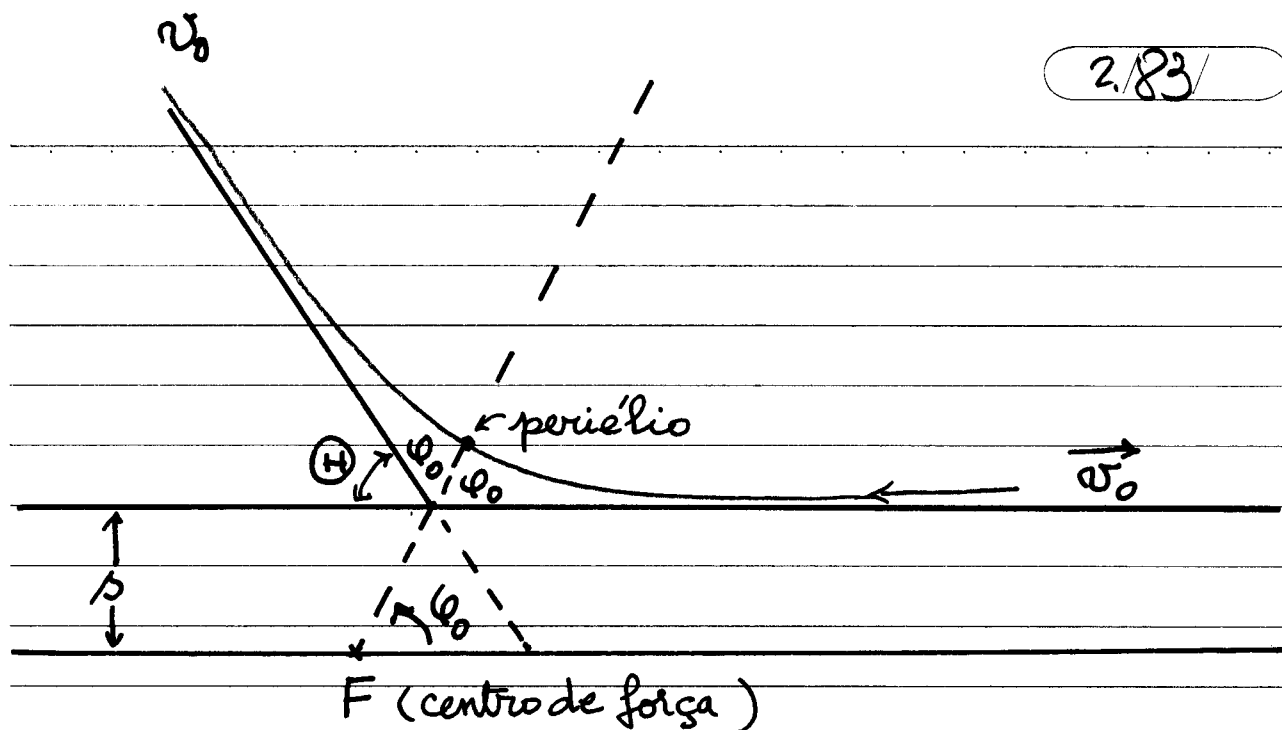
$$n' - n = 2a, (+)$$

$$n' - n = -2a, (-)$$

$$n_{\min} = a + \epsilon a = a(\epsilon + 1).$$

Na prática, para medições, trabalhamos com grandezas assintóticas. Uma grandeza importante é o ângulo de espalhamento, que fornece a mudança de direção entre a incidência e o espalhamento final:





A órbita é simétrica em relação à linha que liga o centro de força (F) com o periélio. O ângulo entre esta linha e as assíntotas é φ_0 . Temos que

$$\Theta + 2\varphi_0 = \pi,$$

ou seja

$$\frac{\Theta}{2} + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

O ângulo φ_0 é medido desde o periélio até o escape em $r \rightarrow \infty$

$$\varepsilon \cos \varphi_0 - 1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{p}{r} = 0$$

Resultado: $\cos \varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}.$

Obtemos: $\sec \varphi_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}} \right)^{-1} = \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right)^{-1},$

porque $\sin \varphi_0$ é positivo, para $0 \leq \varphi_0 \leq \pi$.

Note que:

$$\tan \frac{(\theta)}{2} = \cot \varphi_0 = \frac{\cos \varphi_0}{\sin \varphi_0}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$$

logo

$$\tan \frac{(\theta)}{2} = \sqrt{\frac{E_0}{E}} = \sqrt{\frac{mk^2}{2L^2 E}},$$

é a fórmula para obter o ângulo de espalhamento.

Def. Parâmetro de impacto, s

É a distância entre a direção de incidência e o centro de força (foco F).

Se as partículas incidem desde ∞ com velocidade v_0 , a energia é dada por:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Podemos calcular o momento angular a partir dos valores assintóticos:

$$L = msv_0.$$

Substituindo os valores para o ângulo de espalhamento, obtemos:

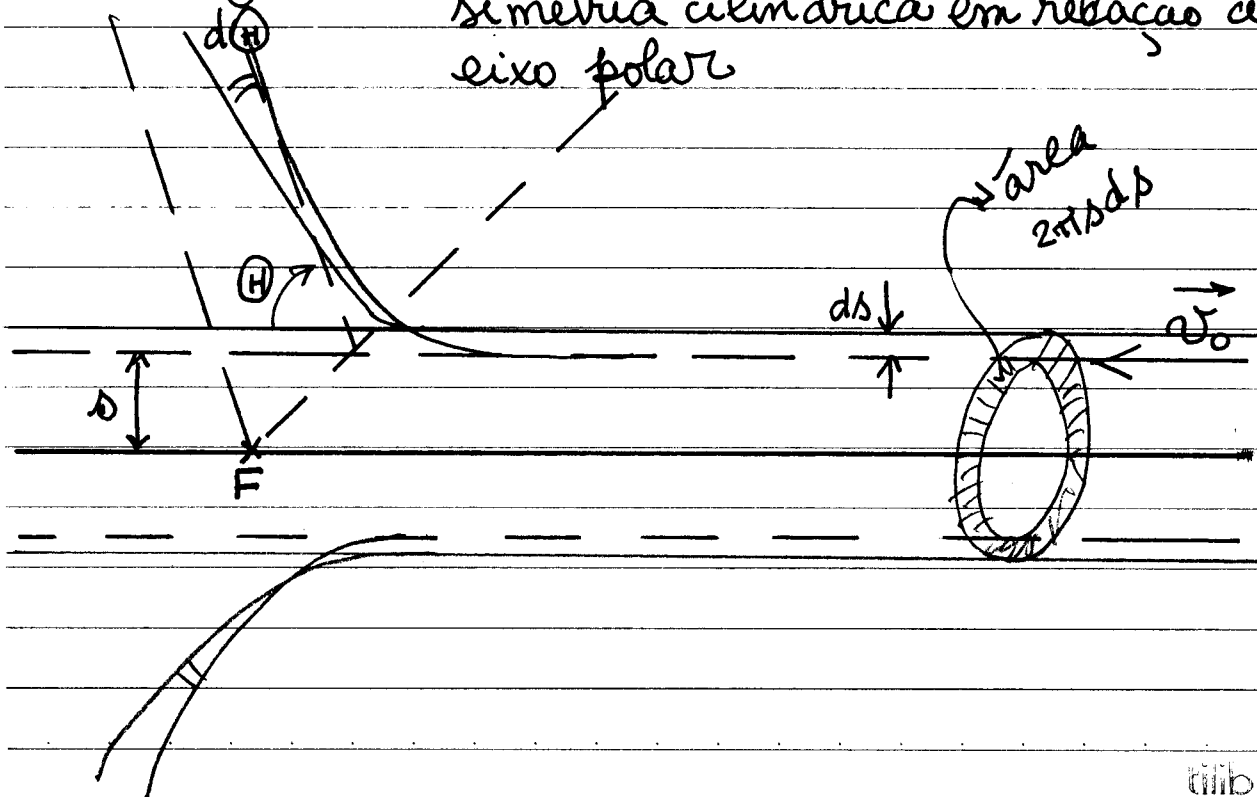
$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{\sqrt{mk^2}}{\sqrt{2EL^2}} = \frac{k}{v_0^2 L^2} = \frac{k}{m^2 v_0^2}$$

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{k}{m^2 v_0^2}$$

Esta relação pode ser invertida, como

$$\Delta = \Delta(\Theta),$$

escrevendo o parâmetro de impacto em função do ângulo de espalhamento. O problema tem simetria cilíndrica em relação ao eixo polar



Sejam as definições:

I : intensidade de partículas incidentes; # de partículas por unidade de tempo, por unidade de superfície $\perp$ ao feixe incidente

dN : # de partículas incidentes com parâmetro de impacto entre s e $s+ds$, por unidade de tempo

Das definições acima temos que:

$$dN = I \, 2\pi s \, ds.$$

As partículas espalhadas emergem com ângulo de espalhamento entre Θ e $\Theta + d\Theta$:

$$ds = \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| d\Theta > 0.$$

Substituindo acima:

$$dN = I \, 2\pi s \, ds = I \, 2\pi s \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| d\Theta$$

$$= I \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| \underbrace{2\pi \sin \Theta \, d\Theta}_{d\Omega},$$

onde $d\Omega = 2\pi \sin(\Theta) d\Theta$ é o ângulo sólido (integrado na outra variável angular).

Escrevemos:

$$dN = I \underbrace{d\sigma}_{\text{área}} = I \frac{\Delta}{\sin(\Theta)} \left| \frac{d\Delta}{d\Theta} \right| d\Omega$$

► Def. Seção Eficaz de espalhamento (ou seção de choque)

$$\underbrace{\sigma(\Theta)}_{\text{área}} \equiv \frac{\Delta}{\sin(\Theta)} \left| \frac{d\Delta}{d\Theta} \right| \geq 0.$$

Temos:

$$d\sigma = \sigma(\Theta) d\Omega = 2\pi \sin(\Theta) \sigma(\Theta) d\Theta$$

► Def. Seção Eficaz Total (área)

$$\sigma_0 = \int d\sigma = \int_{4\pi} d\Omega \sigma(\Theta)$$

$$= 2\pi \int_0^\pi d\Theta \sin(\Theta) \sigma(\Theta)$$

Como é muito difícil, na prática, de ter controle sobre o parâmetro de impacto, a seção eficaz (diferencial e total) são as grandezas que fazem conexão direta com a experiência.

Vamos aplicar o formalismo para o espalhamento de Rutherford:

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{k}{2m v_0^2},$$

ou melhor

$$\Delta = \left(\frac{k}{m v_0^2} \right) \cotan \left(\frac{\Theta}{2} \right)$$

$$\left| \frac{ds}{d\Theta} \right| = \left(\frac{k}{m v_0^2} \right) \frac{1/2}{\sin^2(\Theta/2)} = \left(\frac{k}{2m v_0^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \Theta/2}$$

Para a seção eficaz $\sigma(\Theta)$:

$$\begin{aligned} \sigma(\Theta) &= \frac{\Delta}{\sin \Theta} \left(\frac{k}{2m v_0^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \Theta/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m v_0^2} \right)^2 \frac{\cotan \Theta/2}{2 \sin \Theta/2 \cdot \cos \Theta/2} \times \frac{1}{\sin^2 \Theta/2} \\ &= \left(\frac{k}{2m v_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \Theta/2} \end{aligned}$$

Fórmulas de Rutherford:

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{k}{2m v_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)},$$

$$d\sigma = \left(\frac{k}{2m v_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Por causa da simetria cilíndrica: $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$.

Na experiência de Rutherford:

$$k = 2Ze^2,$$

onde Z é o número atômico do ouro. Ou seja

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{m v_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)},$$

para o espalhamento de partículas α por um núcleo atômico de carga Ze .

Para comparar com a experiência, consideramos uma seção macroscópica Σ , que é a contribuição de todos os núcleos presentes no alvo, por cm^3 (densidade de núcleos). Se supormos que os núcleos estão distribuídos uniformemente, sem superposição, temos

$$\Sigma = n d\sigma,$$

onde 'n' é a densidade de núcleos. Portanto:

$$\Sigma = n \left(\frac{Ze^2}{m v_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}.$$

É o número de partículas α espalhadas por (H) no interior do ângulo sólido $d\Omega$ é

$$dN_{\Sigma} = I \Sigma = n I \left(\frac{Ze^2}{m v_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Escrevemos então:

$$dN_{\Sigma} \sin^4(\theta/2) = n I \left(\frac{Ze^2}{m v_0^2} \right)^2 d\Omega,$$

Se na experiência mudamos apenas o ângulo (H) , deixando todas as outras condições fixas, obtemos:

$$dN_{\Sigma} \sin^4(\theta/2) = cte.,$$

O que foi verificado na experiência de Rutherford.

O cálculo de Rutherford, mostrado aqui, é clássico.

► Coincidência afortunada: o cálculo quântico é idêntico ao clássico mostrado aqui.

Seção eficaz total:

$$\sigma_0 = 2\pi \int_0^\pi \sin(\Theta) \sigma(\Theta) d\Theta$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \sin(\Theta) \left(\frac{Ze^2}{m v_0^2} \right)^2 \frac{d\Theta}{\sin^4(\Theta)/2}$$

$$= 4\pi \int_0^\pi \sin(\Theta/2) \cos(\Theta/2) \left(\frac{Ze^2}{m v_0^2} \right)^2 \frac{d\Theta}{\sin^4(\Theta/2)}$$

$$= 4\pi \left(\frac{Ze^2}{m v_0^2} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\cos(\Theta/2) d\Theta}{\sin^3(\Theta/2)}$$

Mudar variável para $x = \sin(\Theta/2) \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cos(\Theta/2) d\Theta$

ou $\cos(\Theta/2) d\Theta = 2 dx$

$$\sigma_0 = 8\pi \left(\frac{Ze^2}{m v_0^2} \right)^2 \int_0^1 \frac{dx}{x^3}$$

$$= 8\pi \left(\frac{Ze^2}{m v_0^2} \right)^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^3}$$

$$= 8\pi \left(\frac{Ze^2}{m v_0^2} \right)^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} x^{-2} \right)_\epsilon^1$$

$$= 8\pi \left(\frac{Ze^2}{mv_0^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty, \text{ diverge!}$$

Diverge pela contribuição dos processos com pequeno ângulo de espalhamento (e grande parâmetro de impacto). O potencial de Coulomb representa uma força de 'longo alcance'.